G:\Лабы\Задание WORD\workfile\circus.wmf

## *А.П.Доморяд*

## Издательство «Школьник»

## Волгоград, 2003 год

ББК 22.1я2я72

Г96

Доморяд Александр Петрович

**Математические игры и развлечения**

**Избранное**

Редактор Копылова А.Н.

Техн. Редактор Мурашова Н.Я.

Корректор Сечейко Л.О.

Сдано в набор 26.09.2003. Подписано к печати 14.12.2003. Формат 84×108¼ Физ. печ. л 8,375. Условн.

печ. л. 13,74. Уч.-изд.л.12,82. Тираж 200 000 экз. Заказ №979. Цена книги 50 руб.

Доморяд А.П.

Математические игры и развлечения: Избранное. – Волгоград: ВГПУ,2003. – 20 с.

В книге представлены избранные задачи из монографии Доморяда А.П.

«Математические игры и развлечения», которая была издана в 1961 году

Государственным издательством физико-математической литературы г.Москвы.

**ISBN 5-09-001292-X ББК 22.1я2я72**

© Издательство «ВГПУ», 2003

Определение задуманного числа по трём таблицам 3

Солитер 4

Сложение и вычитание вместо умножения 5

Функция [x] (целая часть x) 6

Фигуры из кусочков квадрата 7

Магические квадраты 8

Приложение 9

Предисловие

Из разнообразного материала, объединяемого различными авторами под общим названием математических игр и развлечений, можно выделить несколько групп "классических развлечений", издавна привлекавших внимание математиков:

1. Развлечения, связанные с поисками оригинальных решений задач, допускающих практически неисчерпаемое множество решений; обычно интересуются установлением числа решений, разработкой методов, дающих большие группы решений или решения, удовлетворяющие каким-нибудь специальным требованиям.
2. Математические игры, т.е. игры, в которых двое играющих рядом "ходов", делаемых поочередно в соответствии с указанными правилами, стремятся к определенной цели, причем оказывается возможным для любого исходного положения предопределить победителя и указать, как - при любых ходах противника - он может добиться победы.
3. "Игры одного лица", т.е. развлечения, в которых с помощью ряда операций, выполняемых одним игроком в соответствии с данными правилами, надо достигнуть определенной, заранее указанной цели; здесь интересуются условиями, при которых цель может быть достигнута, и ищут наименьшее число ходов, необходимых для ее достижения.

Классическим играм и развлечениям посвящена большая часть этой книги.

Каждый может попытаться, проявив настойчивость и изобретательность, получить интересные (свои!) результаты.

Если такие классические развлечения, как, например, составление "магических квадратов" могут оказаться по душе сравнительно узкому кругу лиц, то составление, например, симметричных фигур из деталей разрезанного квадрата, поиски числовых курьезов и т.п., не требуя никакой математической подготовки, могут доставить удовольствие и любителям, и "нелюбителям" математики. То же можно сказать и о развлечениях, требующих подготовки в объеме 9-11 классов средней школы.

Многие развлечения и даже отдельные задачи могут подсказать любителям математики темы для самостоятельного исследования.

В целом книга рассчитана на читателей с математической подготовкой в объеме 10-11 классов, хотя большая часть материала доступна девятиклассникам, а некоторые вопросы - даже учащимся 5-8классов.

Многие параграфы могут быть использованы преподавателями математики для организации внеклассной работы.

Разные категории читателей могут по-разному использовать эту книгу: лица, не увлекающиеся математикой, могут познакомиться с любопытными свойствами чисел, фигур и т.п., не вникая в обоснование игр и развлечений, принимая на веру отдельные утверждения; любителям математики советуем изучать отдельные места книги с карандашом и бумагой, решая предлагаемые задачи и отвечая на отдельные вопросы, предложенные для размышления.

# Определение задуманного числа по трём таблицам

Разместив в каждой из трех таблиц подряд числа от 1 до 60так, чтобы в первой таблице они стояли в трех столбцах по двадцати чисел в каждом, во второй – в четырех столбцах по 15 чисел в каждом и в третьей – в пяти столбцах по 12 чисел в каждом (см.рис.1), легко быстро определить задуманное кем-нибудь число N (N≤60), если будут указаны номера α, β, γ столбцов, содержащих задуманное число в 1-й, во 2-й и в 3-й таблицах: N будет равно остатку от деления числа 40α+45β+36γ на 60 или, другими словами, N будет равно меньшему положительному числу; сравнимому с суммой(40α+45β+36γ) по модулю 60. Например, при α=3, β=2, γ=1:

40α+45β+36γ≡0+30+36=6 (mod 60), т.е. N=6.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I** | **II** | **III** |
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |
| **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** |
| 55 | 56 | 57 |
| 58 | 59 | 60 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I** | **II** | **III** | **IV** |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** |
| 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **II** | **III** | **IV** | **V** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **.** | **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** | **.** |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |

Рис. 1

Аналогичный вопрос может быть решен для чисел и пределах до 420, размещенных в четырех таблицах с тремя, четырьмя, пятью и семью столбцами: если α, β, γ, δ - номера столбцов, в которых стоит задуманное число, то оно равно остатку от деления числа 280α+105β+336γ+120δ на 420.

# Солитер

Игра под названием ***солитер*** проводится на доске с тридцатью тремя клетками. Такую доску легко получить, прикрыв шахматную доску листом картона с вырезом.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 73 | 74 | 75 |  |  |
|  |  | 63 | 64 | 65 |  |  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|  |  | 23 | 24 | 25 |  |  |
|  |  | 13 | 14 | 15 |  |  |

На рисунке каждая клетка обозначена парой чисел, указывающих номера горизонтального и вертикального рядов, на пересечении которых находится клетка. В начале игры все клетки, за исключением какой-нибудь одной, заняты шашками.

Требуется снять 31 шашку, причем задаются пустая «начальная» клетка (*a,b)* и «конечная» (*с,d)*, на которой должна оказаться уцелевшая в конце игры шашка. Правила игры таковы: любая шашка может быть снята с доски, если рядом с ней (в горизонтальном или вертикальном направлении) находится с одной стороны какая-нибудь шашка («снимающая»), а с противоположной стороны – пуста клетка, на которую «снимающая» шашка должна быть при этом переведена.

Из теории игры следует, что решение будет в том и только в том случае, когда a≡c(mod3) и b≡d(mod3).

Приведем для примера решение задачи, в которой клетка (44) является и начальной, и конечной.

1. 64-44
2. 56-54
3. 44-64
4. 52-54
5. 73-53
6. 75-73
7. 43-63
8. 73-53
9. 54-52
10. 35-55
11. 65-45
12. 15-35
13. 45-25
14. 37-35
15. 57-37
16. 34-36
17. 37-35
18. 25-45
19. 46-44
20. 23-43
21. 31-33
22. 43-23
23. 51-31
24. 52-32
25. 31-33
26. 14-34
27. 34-32
28. 13-33
29. 32-34
30. 34-54
31. 64-44

Здесь в записи каждого хода указаны для «снимающей» шашки номер исходной клетки и номер клетки, на которую она ставится (при этом с доски снимается шашка, стоящая на промежуточной клетке).

Попробуйте снять 31 шашку:

1. При начальной клетке (5,7) и конечной (2,4);
2. При начальной клетке (5,5) и конечной (5,2).

# Сложение и вычитание вместо умножения

До изобретения таблиц логарифмов для облегчения умножения многозначных чисел применялись так называемые ***простаферетические*** таблицы (от греческих слов «простезис» - прибавление, и «афайрезис» - отнятие), представляющие собой таблицы значений функции при натуральных значениях *z*. Так как при *a* и *b* целых (числа *a*+*b* и *a*–*b* либо оба четные, либо оба нечетные; в последнем случае дробные части у и одинаковы), то умножение *a* на *b* сводится к определению *a+b* и *a–b* и, наконец, разности чисел и , взятых из таблицы.

Для перемножения трех чисел можно воспользоваться тождеством:

(\*)

из которого следует, что при наличии таблицы значений функции вычисление произведения *abс* можно свести к определению чисел: , , , и по ним – при помощи таблицы – правой части равенства (\*).

Приведем в качестве примера такую таблицу для 1 ≤ *z ≤* 30. В таблице даны: крупными цифрами – значения , а мелкими – значения *k*, где 0 ≤k *≤* 23 .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Единицы** | | | | | | | | | |
|  |  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **Десятки** | **0** |  | 01 | 08 | 13 | 216 | 55 | 90 | 147 | 218 | 309 |
| **1** | 4116 | 5511 | 720 | 9113 | 1148 | 14015 | 17016 | 20417 | 2430 | 28519 |
| **2** | 3338 | 38521 | 44316 | 50623 | 5760 | 6511 | 7328 | 8203 | 91416 | 10165 |

Не трудно, пользуясь формулой (\*) и таблицей, получить:

9∙9∙9 = 8203 – 309 – 309 = 729,

17∙8∙4 = 10165 – 38521 – 9113 + 55 = 544 (проверьте!).

# Функция [*x*] (целая часть *x*)

Функция [*x*] равна наибольшему целому числу, не превосходящему *x* (*x* – любое действительное число). Например:

2

3

4

1

-1

-2

-3

1

2

*y*

3

*x*

-1

-2

Рис. 2

, ,

Функция [*x*] имеет «точки разрыва»: при целых значениях *x* она изменяется «скачком».

На рис.2 дан график этой функции, причем левый конец каждого из горизонтальных отрезков принадлежит графику (жирные точки), а правый – не принадлежит.

Попробуйте [доказать](#Приложение1), что если каноническое разложение числа *n*! есть

, то

Аналогичные формулы имеют место для β, γ, …, σ.

Зная это, легко определить, например, сколькими нулями оканчивается число 100! Действительно, пусть . Тогда

и .

Следовательно, 100! делится на (2∙5)24 , т.е. оканчивается двадцатью четырьмя нулями.

# Фигуры из кусочков квадрата

К числу полезных и увлекательных развлечений относится составление фигур из семи кусочков квадрата, разрезанного в соответствии с рис. 3, (а), причем при составлении заданных фигур должны быть использованы все семь кусочков, и они не должны налегать, даже частично, друг на друга.

Рис. 3

(а)

(b)

На рис. 4 приведены симметричные фигуры[[1]](#footnote-1). Попробуйте сложить эти фигуры из частей квадрата, изображенного на рис. 3, (а).

Рис. 4

Из этих чертежей можно складывать другие фигуры (например, изображения различных предметов, животных, и т.п.).

Менее распространенным вариантом игры является составление фигур из кусочков квадрата, изображенного на рис. 3, (b).

# Магические квадраты

*Магическим «n2-квадратом»* назовем квадрат, разделенный на *n2* клеток, заполненных первыми *n2*натуральными числами так, что суммы чисел, стоящих в любом горизонтальном и вертикальном ряду, а также на любой из диагоналей квадрата, равны одному и тому же числу .

Если одинаковы лишь суммы чисел, стоящих в любом горизонтальном и вертикальном ряду, то квадрат называют *полумагическим*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Магический 4*2*-квадрат назван именем Дюрера, математика и художника XVI века, изобразившего квадрат на известной картине «Меланхолия». Кстати, два нижних средних числа этого квадрата образуют число 1514 – дату создания картины.

[Существует лишь восемь девятиклет-очных магических квадратов.](#Приложение2) Два из них, являющиеся зеркальным друг друга, приведены на рисунке; остальные шесть могут быть получены вращением их вокруг центра на 90°, 180°, 270°.

# Приложение

1. Как известно, (\*\*).

Если перебирать по порядку эти множители, то через каждые *p1* «шагов» будут встречаться множители, кратные простому числу *p1*; число их равно , но из них множителей делится на , – на и т.д.

Следовательно, число множителей в равенстве (\*\*), в состав которых множитель *p1* входит ровно один, два, три и т.д. раза, соответственно равно числам:

, , и т.д.

Поэтому

1. Нетрудно полностью исследовать вопрос о магических квадратах при n=3.

Действительно, при S­­­3 = 15, и существует лишь восемь способов представления числа 15 в виде суммы различных чисел (от единицы до девяти):

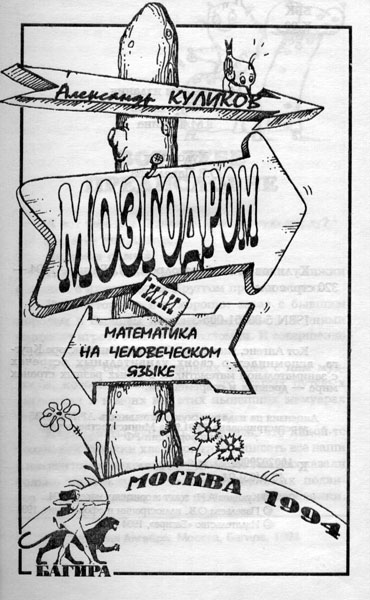
15 = 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 = 3+5+7 = 4+5+6.

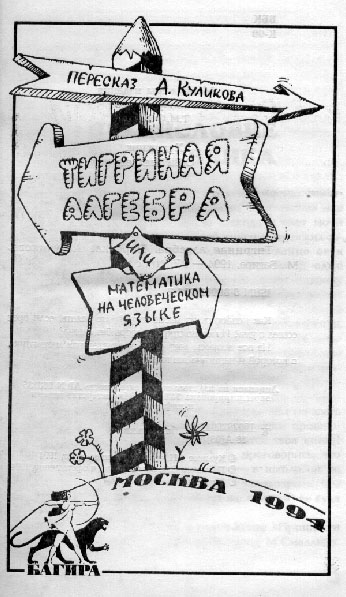
Заметим, что каждое из чисел 1, 3, 7, 9 входит в две, а каждое из чисел 2, 4, 6, 8 – в три указанные суммы и лишь число 5 входит в четыре суммы. С другой стороны, из восьми трехклеточных рядов: трех горизонтальных, трех вертикальных и двух диагональных – через каждую из остальных клеток по два ряда. Следовательно, число 5 должно обязательно стоять в центральной клетке, числа 2, 4, 6, 8 – в угловых клетках, а числа 1, 3, 7, 9 – в остальных клетках квадрата.

## Удивительные встречи с занимательной математикой

## Интереснейший набор задач

## Прекрасное лицо царицы наук МАТЕМАТИКИ





Книги можно заказать по почте: 400012,

Г. Волгоград ул. Триумфальная, 28, каб. 2-24

1. Фигуры заимствованы из книги В. И. Обреимова «Тройная головоломка» [↑](#footnote-ref-1)